# Några historiska ekvationer

av Seppo Nurmi, 2013

## Inledning

Jag sammanfattar här lösningarna till algebraiska andra-, tredje- och fjärdegrads ekvationer. Det här är ganska tidig matematisk historia, för de ursprungliga lösningarna är senast från 1500-talet. Några ännu mycket tidigare. Man får dock ha i åtanke att det fanns sällan några rigorösa prov på äldre tider. De tidigaste resultaten motiveras ofta med geometrisk resonemang. Kravet för formaliserade algebraiska prov uppstår långt senare. Lösningarna kom genomgående från Italien, från handelsstäder som hade fasta förbindelser med Öst. De vetenskapliga idéerna kom österifrån, Europa befann sig långt bak på den tiden. I och med renessanssen följer sedan den europeiska vetenskapens gryning.

De sätt lösningarna ges här har närmast bara historisk betydelse, med undantag kanske av andragardsekvationen. Numera naväds oftast numeriska metoder för att ta fram lösningar till ekvationer i högre grad. I undantagsfall kan en formell lösning behövas i matematisk analys. Då kan man ofta finna en speciell lösningmetod som bättre passar just den situationen.

Det är bara till de fyra första graderna som kan ges en lösning i öppen form (i formen x = ...) , och det är de som är föremålen i denna artikel. Ekvationerna har också historiskt betingade benämningar efter motsvarande polynomer. Första gradens (linjära) $x + a = 0$ kallas "monotisk, och högre grads polynomer i tur och ordning "kvadratisk", "kubisk", "kvartisk", och "kvintisk". Den monotiska lösningen är trivial, medan till den kvintiska, och högre därefter, såsom ovan antyddes, finns ingen generell lösning i öppen form.

Jag utgår här från de grunidéer som som fanns på den tiden lösningarna för tredje- och fjärdeggrads ekvationer blev allmänt kända. Jag är medveten om att det finns modernare metoder. Jag har utfört alla härledningarna själv (och är ensam ansvarig för eventuella fel). Jag har försökt göra det på ett enkelt och överkådligt sätt, och också utan sådan formalism som moderna matematiska prov skulle kräva. Syftet är att demonstrera lösningens idé sanare än strikt bevisa en matematisk tes.

## Andragradsekvationen

Vi ska först lösa den generella andragradsekvationen. Vem som först löste den är inte känt. Lösningar till någon form av andragardsekvationer har förekommit sedan babylonisk tid. En allmän form för den är

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \qquad (1)$$

Vi kan dividera med $a$ för att skriva den i normalformen

$$x^2 + p\,x + q = 0$$

där $p = \frac{b}{a}$ och $q = \frac{c}{a}$ (2) (3)

Om vi inte hade här förstgradstermen skulle vi kunna lösa ekvationen omedelbart. Vi försöker därför göra en substitution som kunde föra ekvationen till en sådan form. Alltså substituera

$$x = t + z \tag{4}$$

Vi får nu (skuggade formler är fördtydligande mellanformer som man kan hoppa över)

$$(t + z)^2 + p\ (t + z) + q = 0$$

$$\left(t^2 + 2t\ z + z^2\right) + (p\ t + p\ z) + q = 0$$

$$z^2 + \left(2t + p\right)\ z + \left(t^2 + p\ t + q\right) = 0 \tag{5}$$

Vi sätter nu $2t + p = 0$ vilket ger oss: $t = -\frac{p}{2}$ (6)

Ekvationen blir nu

$$z^2 + \left(-\frac{p}{2}\right)^2 + p\ \left(-\frac{p}{2}\right) + q = 0$$

$$z^2 + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q = 0$$

$$z^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0$$

$$z^2 = \frac{p^2}{4} - q \tag{7}$$

Vi kan nu lösa $z$

$$z = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \tag{8}$$

och således också $x$ genom att använda (4) och (6)

$$x = t + z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \tag{9}$$

Lösningen till ekvationen (1) får vi genom att här sätta in (2) och (3)

$$x = -\frac{b}{2\ a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4\ a^2} - \frac{c}{a}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\ a\ c}}{2\ a} \tag{10}$$

# Tredjegradsekvationen

Vi skriver tredjegradsekvationen direkt i normalformen

$$x^3 + a_2\ x^2 + a_1\ x + a_0 = 0 \tag{11}$$

Från lösningen till andragradsekvationen kan vi låna idén att försöka få bort en av termerna, den näst högsta, andragradstermen. Substitution

$$x = t + z \tag{12}$$

i formel (11) ger

$$(t+z)^3 + a_2\,(t+z)^2 + a_1\,(t+z) + a_0 = 0$$

$$\left(t^3 + 3\,t^2 z + 3\,t\,z^2 + z^3\right) + a_2\left(t^2 + 2\,t\,z + z^2\right) + a_1\,(t+z) + a_0 = 0$$

$$z^3 + 3\,t z^2 + 3\,t^2\,z + t^3 + a_2\,z^2 + 2\,t\,a_2\,z + t^2\,a_2 + a_1\,z + t\,a_1 + a_0 = 0$$

$$z^3 + \left(3\,t z^2 + a_2\,z^2\right) + \left(3\,t^2\,z + 2\,t\,a_2\,z + a_1\,z\right) + \left(t^3 + t^2\,a_2 + t\,a_1 + a_0\right) = 0$$

$$z^3 + \left(3\,t + a_2\right) z^2 + \left(3\,t^2 + 2\,t\,a_2 + a_1\right) z + \left(t^3 + t^2\,a_2 + t\,a_1 + a_0\right) = 0 \tag{13}$$

Vad vi vill åstadkomma är alltså att andragradstermen elimineras: $3\,t + a_2 = 0$

$$t = -\frac{a_2}{3} \tag{14}$$

Substituera detta i (13):

$$z^3 + \left[3\left(-\frac{a_2}{3}\right)^2 + 2\left(-\frac{a_2}{3}\right) a_2 + a_1\right] z + \left[\left(-\frac{a_2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{a_2}{3}\right)^2 a_2 + \left(-\frac{a_2}{3}\right) a_1 + a_0\right] = 0$$

$$z^3 + \left(a_2^{\,2} - \frac{2}{3}\,a_2^{\,2} + a_1\right) z + \left(-\frac{a_2^{\,3}}{27} + \frac{a_2^{\,2}}{9}\,a_2 - \frac{a_1\,a_2}{3} + a_0\right) = 0$$

$$z^3 + \left(\frac{a_2^{\,2}}{3} + a_1\right) z + \left(-\frac{a_2^{\,3}}{27} + \frac{3\,a_2^{\,3}}{27} - \frac{a_1\,a_2}{3} + a_0\right) = 0$$

$$z^3 + \left(\frac{a_2^{\,2}}{3} + a_1\right) z + \left(\frac{2\,a_2^{\,3}}{27} - \frac{a_1\,a_2}{3} + a_0\right) = 0 \tag{15}$$

Den första som veterligen löste en tredjegrads ekvation var Scipione dal Ferro (på 1500-talet). Tidigare betraktades de i princip olösliga. Vi skriver om ekvationen (15) ovan i dal Ferros form (av historiska skäl lägger vi $q$ på högre sida, dvs. negativ $q$ jämfört med normal- formen; negativa talen, uppfunna i Indien, var redan kända i Europa, men undveks ännu oftast):

$$z^3 + p\,z = q \tag{16}$$

där

$$p = \frac{a_2^{\,2}}{3} + a_1 \tag{17}$$

och

$$q = -\frac{2\,a_2^{\,3}}{27} + \frac{a_1\,a_2}{3} - a_0 \tag{18}$$

Metoden att lösa tredjegrads ekvationen generellt uppfanns av Nicolo från Brescia, också känt med öknamnet Tartaglia ('stammaren'). Han delade kunskapen vidare till Giorolamo Cardan från Milano, som publicerade lösningen (1554). Lösningen här följer fritt dessa idéer. Notera först att

$$(u+v)^3 = u^3 + 3\,u^2\,v + 3\,u\,v^2 + v^3$$

$$(u+v)^3 - 3u\,v(u+v) = u^3 + v^3 \qquad (19)$$

om nu $-3\,u\,v = p$ och $u^3 + v^3 = q$ (20) (21)

då är $u + v$ en lösning till ekvationen (16).

Men nu fås från (20) $$v = -\frac{p}{3u} \qquad (22)$$

så (21) ger $$u^3 - \frac{p^3}{27\,u^3} = q \qquad (23)$$

Vilket kan skrivas, genom att multiplicera (23) med $u^3$ och flytta allting till samma sida:

$$u^6 - q\,u^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \qquad (21)$$

Detta är, märk väl, en andragrads ekvation av $u^3$, som vi redan kan lösa. Vi behöver bara ta den ena av lösningarna (den andra blir $v^3$ som synes):

$$u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad (22)$$

från (21)

$$v^3 = q - u^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad (23)$$

Och slutgiltigen

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad (24)$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad (25)$$

Nu blir alltså en lösning till (16):

$$z_1 = u + v \qquad (26)$$

*Redan Cardan upptäckte att lösningarna ibland kunde få en märklig form. Ta t.ex ekvationen*

$$z^3 = 15\ z + 4$$

*Man kan lätt se att* $z = 4$ *är en lösning.*
*(På den tiden skrev man inte gärna ut negativa utryck, utan man satte dem på den sidan av ekvationen där de blev positiva; i själva verket hände det ofta att ekvationerna delades i olika typer efter detta, och för varje typ utarbetades sin egen lösningsformel. Vi använder här en något modernare metod).*
*Formlerna ovan ger oss för* $p = -15$ *och* $q = 4$ *:*

$$u = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + 11 \cdot \sqrt{-1}}$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 + 125}} = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 - 11 \cdot \sqrt{-1}}$$

*Trots kvadratroten av ett negativt tal, som på den tiden ansågs att vara ett ogiltigt uttryck, kunde man utan vidare räkna resultatet efter algebrans regler:*

$$u = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1} \qquad \textit{för att} \qquad \left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

$$v = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1} \qquad \textit{för att} \qquad \left(2 - \sqrt{-1}\right)^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

*vilket ger* $z = u + v = \left(2 + \sqrt{-1}\right) + \left(2 - \sqrt{-1}\right) = 4$

*Cardan fann detta märkligt, och kunde inte förklara hur det kunde komma sig. För oss är det ganska begripligt, för efter Cardans tid, till en del tack vare Cardans upptäckt, uppfanns de imaginära talen, vars enhet nu brukar anges som:* $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

*Anmärkingsvärt nog så uppfanns inte de imaginära talen från adragradsekvationen (tvärtom än vad man kanske ofta tror). Man brukade bara förkasta kvadratrötter av negativa tal som "ogiltiga" lösningar. När det gällde tredjegradsekvationen blev det dock nödvändigt att acceptera kavdratrötter från negativa tal, eftersom de nu kunde representera delar till "giltiga" lösningar.*

Vi vet numera från modern komplex analys att det är generellt tre lösningar, och att en del av dem kan vara komplexvärda. Minst en är dock alltid reell för en ekvation med reella koefficienter. Två ytterligare lösningar kan bildas med $u$ och $v$:

$$z_2 = -\frac{u + v}{2} + \frac{u - v}{2}\sqrt{3}\ \mathrm{i} \tag{27}$$

$$z_3 = -\frac{u + v}{2} - \frac{u - v}{2}\sqrt{3}\ \mathrm{i} \tag{28}$$

Att dessa är lösningar kan enkelt ses med en substitution i (16), och sedan tillämpa formlerna (20) och (21). Man brukar också skriva diskriminanten, utrycket under kvadratroten:

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \tag{29}$$

Från (12) får vi nu lösningarna till (11), sammanfattningsvis

$$
\begin{aligned}
x_1 &= u + v + t \\
x_2 &= -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i} + t \\
x_3 &= -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i} + t
\end{aligned}
\qquad (30)
$$

där vi betecknar

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \qquad v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$$

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$p = \frac{a_2^{\,2}}{3} + a_1 \qquad q = -\frac{2\,a_2^{\,3}}{27} + \frac{a_1\,a_2}{3} - a_0$$

$$t = -\frac{a_2}{3}$$

# Fjärdegradsekvation

I normalformen kan fjärdegradsekvationen skrivas

$$x^4 + a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0 = 0 \qquad (31)$$

Åter igen sätter vi $x = z + t$ (32)

$$(z+t)^4 + a_3\,(z+t)^3 + a_2\,(z+t)^2 + a_1\,(z+t) + a_0 = 0$$

$$\left(z^4 + 4\,t\,z^3 + 6\,t^2\,z^2 + 4\,t^3\,z + t^4\right) + a_3\left(z^3 + 3\,t\,z^2 + 3\,t^2\,z + t^3\right) + \ldots$$

$$\ldots + a_2\left(z^2 + 2\,t\,z + t^2\right) + a_1\,(z+t) + a_0 = 0$$

$$z^4 + \left(4\,t + a_3\right) z^3 + \left(6\,t^2 + 3\,a_3\,t + a_2\right) z^2 + \left(4\,t^3 + 3\,a_3\,t^2 + 2\,a_2\,t + a_1\right) z + \ldots$$

$$\ldots + t^4 + a_3\,t^3 + a_2\,t^2 + a_1\,t + a_0 = 0 \qquad (33)$$

För att få bort tredjegradstermen sätter vi $t = -\frac{a_3}{4}$ (34)

Ekvationen reduceras nu till formen

$$z^4 + p\,z^2 + q\,z + r = 0 \qquad (35)$$

där vi har

$$p = 6\,t^2 + 3\,a_3\,t + a_2 = a_2 - \frac{3}{8}\,a_3^{\,2} \tag{36}$$

$$q = 4\,t^3 + 3\,a_3\,t^2 + 2\,a_2\,t + a_1 = \frac{11}{64}\,a_3^{\,3} - \frac{a_2\,a_3}{2} + a_1 \tag{37}$$

$$r = t^4 + a_3\,t^3 + a_2\,t^2 + a_1\,t + a_0 = \frac{a_2\,a_3^{\,2}}{16} - \frac{3\,a_3^{\,4}}{256} - \frac{a_1\,a_3}{4} + a_0 \tag{38}$$

En av de tidigaste i Europa som diskuterade algebraiska lösningar till fjärdegradsekvation var Luca Pacioli runt år 1500. Det verkar dock ha presenterats lösningar redan långt tidgare. I öst ger till exempel Al-Khwarizimi (800-talet) geometeriska bevis för lösningsmetoder, och Abraham bar Hiyya Ha-Nasi (Savasorda) publiserar år 1145 sin bok "Liber embadorum", som bla. innehåller en fullkomlig uppsättning av lösningar till fjärdegrads ekvationer. Fjärdegradsekvationen verkar man alltså ha löst innan tredjegradsekvationen, även om man på den tiden motiverade lösningarna geometriskt. Algebraiska bevis var ännu bristfälliga, eller så gavs inga.

*Det kan vara intressant att se hur man skrev matematisk text på 1000-talet. Till exempel* 6.p.R.10 *betyder* $6 + \sqrt{10}$*, och* 18.m.R.90 *skriver vi numera* $18 - \sqrt{90}$*. Skrivsättet som användes då skulle passat vår tids datoriserad symbolisk behandling mycket bättre än vår nuvarande matematiska skrivsätt.*

Cardans elev Lodovico Ferrari gav en elegant algebraisk härledning, baserad på tredjegrads ekvationen, som alltså på hans tid redan var löst. Följande metod följer Ferraris tankegångar. Vi kan nu alltså begränsa oss att lösa ekvationer av typ:

$$z^4 + p\,z^2 + q\,z + r \tag{39}$$

Vilket kan skrivas så att vi kvadrat-kompletterar vänstersidan till binomiaform $\left(z^2 + p\right)^2$

$$z^4 + 2p\,z^2 + p^2 = p\,z^2 - q\,z - r + p^2 \tag{40}$$

Här kommer ett smart drag: för ett valt värde $y$ kan vi skriva ekvationen så, att den fortvarande är kvadratisk till vänster

$$z^4 + 2p\,z^2 + \left(2\,z^2\,y + 2\,p\,y + y^2\right) + p^2 = p\,z^2 - q\,z - r + p^2 + \left(2\,z^2\,y + 2\,p\,y + y^2\right) \tag{41}$$

$$\left(z^2 + p + y\right)^2 = \left(p + 2\,y\right)\,z^2 - q\,z + \left(p^2 - r + 2\,p\,y + y^2\right) \tag{42}$$

Men nu kan vi välja $y$ så att också högra sidan kan skrivas som kvadrat. Detta krav uppfylls om andragrads ekvationen som vi får från högra sidan har två identiska rötter, dvs om dess diskriminant är noll. Det var den ursprungliga tankegången, fast det låter kanske lite krågligt. Vi gör det något mer överskådligt genom att betrakta binomialkvadraten, som är lätt atta "gissa" från högra sidan av (42):

$$\left(\sqrt{p + 2\,y}\cdot z - \sqrt{p^2 - r + 2\,p\,y + y^2}\right)^2 \tag{43}$$

Denna blir lika med högersidan av (42), om vi har uppfyllt

$$2\sqrt{\left(p + 2\,y\right)\left(p^2 - r + 2\,p\,y + y^2\right)} = q \tag{45}$$

vilket ger kvadrerat

$$q^2 - 4\,(p + 2\,y)\,\left(p^2 - r + 2\,p\,y + y^2\right) = 0 \tag{44}$$

Det blir i själva verket samma villkor som från den avsedda diskriminanten. Vad vi vinner med att göra på det här sättet är att vi också direkt ser hur kvadraten på högersidan ser ut (43). Här är (44) nu en ekvation som ger oss y. Vi kan skriva om den

$$4\,r\,p - 16\,p^2\,y - 20\,p\,y^2 - 4\,p^3 + q^2 - 8\,y^3 + 8\,r\,y = 0$$

$$\left(q^2 - 4\,p^3 + 4\,r\,p\right) + \left(8\,r\,y - 16\,p^2\,y\right) - 20\,p\,y^2 - 8\,y^3 = 0$$

$$-\left(q^2 - 4\,p^3 + 4\,r\,p\right) - 8\,\left(r - 2\,p^2\right)\,y + 20\,p\,y^2 + 8\,y^3 = 0$$

$$y^3 + 5\,p\,y^2 - \left(r - 2\,p^2\right)\,y - \left(\frac{q^2}{8} - \frac{p^3}{2} + \frac{r\,p}{2}\right) = 0 \tag{45}$$

Det är en tredjegradsekvation av $y$, vilken vi redan vet hur man löser. För varje lösning $y$ kan vi nu skriva, genom att ta roten av båda sidorna på (42), med högersidan ersatt med (43)

$$z^2 + p + y = \sqrt{p + 2\,y}\cdot z - \sqrt{p^2 - r + 2\,p\,y + y^2} \tag{46}$$

Och vi får

$$z = \sqrt{\sqrt{p + 2\,y}\cdot z - \sqrt{p^2 - r + 2\,p\,y + y^2} - p - y} \tag{47}$$

Därmed kan vi sammanfatta lösningen till (31)

$$x = \sqrt{\sqrt{p + 2\,y}\cdot z - \sqrt{p^2 - r + 2\,p\,y + y^2} - p - y} + t \tag{48}$$

$$p = a_2 - \frac{3}{8}\,a_3^{\,2}$$

$$q = \frac{11}{64}\,a_3^{\,3} - \frac{a_2\,a_3}{2} + a_1$$

$$r = \frac{a_2\,a_3^{\,2}}{16} - \frac{3\,a_3^{\,4}}{256} - \frac{a_1\,a_3}{4} + a_0$$

$$t = -\frac{a_3}{4}$$

där $y$ är en lösning till

$$y^3 + 5\,p\,y^2 - \left(r - 2\,p^2\right)\,y - \left(\frac{q^2}{8} - \frac{p^3}{2} + \frac{r\,p}{2}\right) = 0$$

- o -