En kort studie i matematisk musikteori

Seppo Nurmi, 2004

Inledning

Denna skrift är inte så mycket för den musikintresserade, som för den matematiskt intresserade. Jag hoppas kunna förmedla några tankar om tonskalornas matematik. Skriften blev till när jag försökte reda ut begreppen för mig själv, och sökte svar på några grundläggande frågor, som varför det är 7, eller egentligen 12, toner i skalan, och varför har de just de frekvenser de har. Eller varför finns det sänkta och upphöjda noter, och ändå är de samma tangenter i båda fallen, på en piano till exempel. Jag fördjupar mig inte alls i andra kulturers skalor, fast jag tror mig veta att indierna, japanerna mm. har sina egna skalor. Jag ska bara försöka reda ut lite om den västerländska 7/12-toniga skalans bakgrund.

Tempererade skalor

Musikteorin är gammal, det är kanske den äldsta matematiken vi känner till. Greken Pythagoras på 600-talet f.Kr satte grunden till västerländsk musikteori. Han, jämte eleverna i hans matematikerskola, konstaterade, baserad på stränginstrument i huvudsak, att tonhöjder dvs. stränglängder som förhåller sig till varandra som små heltal, typ 2/3, 3/4 osv. med tal helst mindre än 7 producerar, när de klingar tillsammans, en välljud, som kallades harmoni. Annars blir det oljud eller disharmoni. Om man beräknar sedan tonhöjder från dessa Pythagoreiska harmoniska principer får man ett antal olika klassiska skalor. Som dessvärre inte stämmer överens med varandra något vidare bra, om vi ser det krasst matematiskt. Det går bra med harmonierna så länge man håller sig i samma skala, men det blir värre om man ska flytta, "transponera", från en skala, säg C-dur, till en annan, säg F-dur. Pythagoreiska skalor bygger på exakta heltalskvoter men har ojämna mellanrum mellan tonerna.
(På svenska skrivs namnet ibland också som "Pytagoras" utan "h".)

Det mesta av nutida musik, i synnerhet modern rock och pop, bygger dock på en jämn skala, där man gått ifrån den alltför knepiga Pythagoreiska kvot-matematiken. Så är dock inte fallet med en del äldre typer av instrument och med klassisk musik, utan vi har där kvar en del arv från den äldre musikmatematiken. Vi har ju sedan också instrument som inte behöver strikt följa någon förbestämd skala: de som inte har någon fast stämning för varje ton, violin till exempel, där fingerplacering på greppbrädan bestämmer tonhöjden.

Lutor och orglar mm. behövde dock en faststämd skala, och det har musikhistoriskt förekommit olika faststämda skalor, baserade på lite olika modeller. Det fanns, och finns alltjämt, faststämda instrumentet byggda för en viss tonart, A-dur till exempel, som det inte går att spela i andra tonarter med. En professionell munspelare har en hel låda av munspel med sig i olika tonarter. Det går bra med munspel, men för en konsertpianist blir det jobbigt att släpa med sig ett gäng flyglar i olika tonarter till konsertturen. Särskilt då på tidigare sekler med bara hästtransporter. Så man var tvungen att hitta på en kompromiss. Kompromissen kom att kallas för en "tempererad skala", för att den fick en viss egen klangfärg, karäktär dvs. en "temperament". Det tempererade skalorna började utvecklas när klaviaturinstrumenten dök upp på 1600-talet, och man hade ett behov att transponera musik från en tonart till en annan, och spela det med samma instrument, samt få olika instrument gå ihop i en ensemble.

Det kan ha gått till på det sättet, något ungefär, men jag är ingen expert på musikhistoria, jag är bara en glad amatör som försöker få lite ordning på det hela. Jag koncentrerar mig nu på det jag känner mig mera hemma i, nämligen matematiken. Det blir lite mer komplicerat i slutändan än det först verkar. Alla tempererade skalor, som sagt, är kompromisser. Den moderna tonskalan är inte den ända tempererade skalan som finns eller har funnits, kompromisserna kan göras på olika sätt. Jag tar upp som ett exempel också en annan ojämn skala som bygger på olika kvoter mellan tonerna. Det var sådana som var de äldsta tempererade skalorna. Som ett exempel när detta med tempererade skalor var nytt, ta ett "stycke" av Johan Sebastian Bach, "Das wohl temperiertes Klavier", "Det vältempererade klaveret". Det är en tidig förfader till pianot som avses, som var stämt i ett tempererat skala, det har ingenting med uppvärmning av klaveret eller spelaren att göra.

Jämn tempererad 12-stegsskala

Den moderna tonskalan är en 12-tonsskala som kallas en "jämn tempererad skala". Instrument med fast stämning stäms så för det mesta nuförtiden. Men andra stämningar än denna förekommer alltjämt av historiska skäl och när det gäller speciella instrument. Den moderna jämna tonskalan bygger på tanken att det finns 12 halvtoner med exakt samma relation till varandra. Vilket blir nu kvoten mellan dem? Vi behöver en kvot q , ett tal, som är den samma mellan alla successiva 12 halvtons intervall, så att en oktav produceras när kvoten tillämpas 12 gånger till tonerna successivt medan man går uppåt i skalan. Lätt som en plätt, eller hur? Här behövs bara elementär potens- och roträkning. Eftersom propotionen mellan tonerna i en hel oktavs intervall är 2 får vi villkoret att den sökta kvoten multiplicerad med sig själv 12 gånger ger två. Med andra ord blir resultatet tolfte roten av två, eller eftersom tolfte rötter inte är praktiskt att hålla på med, det matematiskt ekvivalenta uttrycket: två upphöjd till potensen en tolftedel.

$$q = 2^{\frac{1}{12}}$$

Det är inte ens närheten av någon enkel kvot mellan små heltal, i stället är det ett tal som har hur många decimaler som helst utan någon upprepning av mönstret. Här angiven med de femton första decimalerna: $q = 1.059463094359295$

Den är faktiskt vad som i matematiken kallas för ett "irrationellt tal", så långt från kvoter mellan små heltal som det går att komma. Jämför man detta med den gamla grekiska harmoniläran, så kan det verka som detta med tolfte rot inte kan vara så bra för harmonierna. Men som tur är, är det bara de större heltalskvoterna 11/13 osv. som låter riktigt illa och skär i örat. Om man tar kvoter som är någorlunda nära en harmonisk helatslkvot typ 2/3, även om det inte är exakt en heltalskvot, så låter det faktiskt bra mycket bättre. Varken örat eller instrumentet är alldeles exakt noggranna, och en liten avvikelse från den perfekta harmonin kan tolereras. Man ska se det som en hyfsad kompromiss. Man är illa tvungen att kompromissa. Varför det är så, det försöker jag reda ut och förklara alldeles strax.

Tonerna i två olika tempererade skalor räknade från A

Vi börjar skalan från tonen A2 (A på andra oktaven) på 220 Hz, vilket internationellt har bestämts definierar tonskalan (inte C som man hade kunnat tro, men ibland, kanske mer i äldre litteratur och äldre musik, anges C på 264 Hz som grundton, också kallad "kammarmusikskalan"). Lika gärna kan man utgå från en oktav högre, från 440 Hz, men jag håller till den lägre frekvensen. Här "Hz" avser frekvensmåttet "Hertz", som anger antalet svängningar per sekund. Tabellen visar dels den jämna tempererade skalan, dels en ojämn skala som bygger på rationella tal (bråktal) gånger grundton, vilket ger lite olika relationer mellan successiva toner i skalan. Här är en tabell över tonerna i en oktav:

Nr	Tonsteg	Tecken	Jämn skala Hz	Ojämn skala	Kvoten	Decim.	Engelsk intervall
1	prim	A	220,000	220,000	1/1		prime
2	liten sekund	A#, Bb	233,082	234,667	16/15	1,067	second minor
3	(stor) sekund	B	246,942	247,500	9/8	1,055	second major
4	liten ters	C	261,626	264,000	6/5	1,067	third minor
5	(stor) ters	C#, Db	277,183	275,000	5/4	1,042	third major
6	kvart	D	293,665	293,333	4/3	1,067	fourth
7	tritonus	D#, Eb	311,127	309,375	45/32	1,055	
8	kvint	E	329,628	330,000	3/2	1,067	fifth
9	liten sext	F	349,228	352,000	8/5	1,067	sixth minor
10	(stor) sext	F#, Gb	369,994	366,667	5/3	1,042	sixth major
11	liten sept	G	391,995	391,111	16/9	1,067	seventh minor
12	(stor) sept	G#, Ab	415,305	412,500	15/8	1,055	seventh major
13	oktav	A	440,000	440,000	2/1	1,067	octave

Det är den jämna skalan som är dagens standard, och kvoten mellan tonerna är q som räknades ovan. När det gäller den ojämna skalan till höger om den jämna så finns det fler valmöjligheter än denna, och experterna är oneniga om kvalitéerna mellan alternativen.

- Om man tar prim, sekund, ters, kvart, kvint, sext, sept och oktav får man A-dur skalan (ordet "stor" lämnas oftast bort, därför har jag satt det i parentes i tabellen).
- Om man ersätter tersen med en halvton sänkt "liten" ters och sexten och septen med motsvarande "liten" intervall får man A-moll skalan.
- De andra tonarterna får man med "transponering", man räknar upp eller ner antalet halvtonsteg som skalan ska transponeras på. Till exempel C-dur skalan får man genom att transponera upp A-dur med 3 halvtonssteg.
- Man höjer en ton, vilken som helst, med en oktav genom att multiplicera frekvensen med två, och sänker en oktav genom att dela med två.

Det kan vara intressant att veta att kvinten var det tonsteget som ensam ansågs harmoniskt rätt länge, i alla fall vad kyrkomusik gällde. Treklangsakord, som också innehåller en ters, accepterades inte utan betraktades som en disharmoni. Det hör man fortvarande i tidstypiskt spelad medeltida kyrkomusik, som har sin speciella klang av rena kvinter. I modern rock, i "heavy metall" i synnerhet, har man i viss mån återgått till rena kvinter, vilket beror på att hårt "distad" (distorderad, toppklippta ljud) elgitarr lätt låter grötig med terser. Kan det varit så att medeltida och tidigare instrumentteknik hade liknande problem?

Anmärkning 1. De engelska namnen längst till höger i tabellen är med för att kunna jämföra med engelskspråkiga webbsidor om ämnet. På motsvarande sätt kallas durskalan på engelska för "major" och mollskalan "minor". Tabellen ger således en förklaring till detta språkbruk.

Anmärkning 2. Jag har genomgående använt "B" för att beteckna tonen under C. Det finns en annan skola som använder "H". Dessa två skolor vill inte veta av varandra, så det går inte säga vad som är rätt. "B" är praktisk av den enkla anledningen att det mesta man läser numera är på engelska, och den anglosaxiska världen använder uteslutande B-beteckningen. För att fullkomligt blanda begreppen kan jag nämna att H-skolans H motsvaras av B-skolans B. H-skolans B, som är sänkt H, motsvaras av B-skolans Bb (B-flat), och H# motsvaras av B# (B-sharp). Pop- och rockfolk lär oftare än andra vara B-skole-anhängare, medan H-skolan mig veterligen är mest populär bland kör-folk, kammarmusiker o.d.

Hur uppstår då skalorna?

Den första teoretiska frågan är: hur många toner ska man ha i en skala? Toner är ljudvågor, och det finns en matematisk teori, kallad frekvensanalys, som handlar om hur olika kurvor och svängningar förhåller sig till varandra. Vi behöver här inte gå in i frekvensanalysen, som tillhör den mer avancerade matematiken, utan kommer en bra bit iväg med bara bråktal, och ibland lite potenser och logaritmer.

Den grundläggande lärdomen som vi kan hämta ur frekvensanalysen, vilket redan de gamla grekerna kände till erfarenhetsmässigt, är att två toner som klingar tillsammans och blandas genererar ytterligare toner, och dessa nya toner sedan klingar tillsammans med varandra och de ursprungliga, och genererar ännu mer toner. Om tonerna väljs hur som helst har man på en bråkdel av sekund fått en hel kakofoni av blandade toner, vilket allt som oftast inte låter bra alls, och kallas för "disharmoni", eller "dissonans" (latinets oljud). Men om det till äventyrs skulle låta bra kallas det för "harmoni" (från grekiskan) eller också "consonans" (latinets medljud). Instrumentets klangkropp ger dessutom förstärkning till ljudet, kallad "resonans" (också latin och betyder omljud eller återljudande).

Det är klart att den som vill framföra vacker musik försöker välja toner som leder till harmoni. Det visar sig att harmoni uppstår om frekvenserna av de ingående ursprungliga tonerna förhåller sig till varandra som kvoter mellan små heltal, helst tal som är mindre eller högst 7 ungefär. Vad som händer då är att således bildade nya tonerna matchar ihop med de ursprungliga så att de klingar tillsammans jämnt och vackert utan att bråka med varandra med en massa svaj och skrammel. Det är då örat uppfattar det som någonting välklingande. Och sedan sätter man ihop toner och harmonier och det blir till musik, i bästa fall.

Vi har nu alltså fått anledning att titta närmare på kvoter mellan små tal. Först konstaterar vi att 2/1 är en för trivial kvot, den ger ett förhållande mellan toner som inte innehåller så mycket. Det låter som en upprepning av samma ton i högre tonläge. Detta kallas (av historiska skäl) en "oktav". Vi tar i stället den näst enklaste harmoniska kvoten 3/2 som kallas för "kvinten", av musikteoretiska skäl och av urgammal hävd.

Med denna kvot multiplicerar vi sedan grundtonen och får en ny ton, och sedan (3/2) ggr. den, dvs.(3/2)*(3/2)*grundtonen, som blir en tredje ton. Och så vidare. Dessa nya toner är nu nya toner i skalan, men pga att vi håller på och multiplicerar och multiplicerar, hamnar de nödvändigtvis inte i samma oktav, utan som regel i någon högre oktav. Om det hela ska gå ihop snyggt måste detta upprepat tillräckligt många gånger leda till att vi kommer till slut till en ton som är någon dubblett av (antal oktaver över) grundtonen. Det är nödvändigt eftersom vi väntar oss att det finns ett begränsat antal toner i skalan. Vi tar det igen. Varje oktav är lika med dubblering av tonhöjden, och ska vi ha ett begränsat antal toner i skalan måste vi till slut komma till samma ton igen, fast några oktaver högre upp.

Eftersom man nu hela tiden skapar nya toner blir det lika många toner i skalan som det är oktaver i denna kvintberäkning. Det kan låta det knepigt och kräver lite tankemöda, men det blir så. De nya tonerna blir nu visserligen toner i allt högre oktaver, men man kan alltid dividera tonhöjden med två tillräckligt många gånger för att sänka dem ner till den oktaven man startade med. På så vis får man in alla tonerna inom oktaven.

Matematiskt uttryckt vill vi uppnå följande: 3/2 upphöjd till någon potens n (antalet toner som skapats) ska ge samma resultat som 2 (en oktav) upphöjt till en annan heltal potens k (antalet oktaver som processen går uppåt). Då har vi gått runt alla n tonerna i skalan. Formeln blir:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k$$

Går det jämnt upp med några heltal n och k kan vi dela tonerna med två tills de hamnar innanför den första oktaven, och vi får en skala som precis passar in i oktaven. Vi vill nu se om det stämmer. Genom att ta logaritmen av ekvationen ovan kommer vi till en ny ekvation med logaritmer till vänster och en heltalskvot till höger.

$$\frac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2} = \frac{n}{k}$$

Dessvärre blir den matematiska slutsatsen att det här kan aldrig gå ihop, för på vänstersidan i ekvationen har vi vad i matematiken kallas ett irrationellt tal (ett tal som inte kan uttryckas exakt som en kvot av heltal, utan bara med ett oändligt antal decimaler) och på högersidan ett rationellt tal (en heltalskvot). Det slutar med en matematisk omöjlighet. Vi kommer till den sorgliga slutsatsen att vi inte kan skapa någon exakt tonskala alls av harmoniska 3/2 toner, som skulle gå jämt upp i oktaven. Och det blir inte heller bättre att prova med andra harmoniska kvoter som 5/4 osv., utan snarare ännu värre. Musiken har således ingen exakt matematisk teori.

För att ändå komma någon vart behöver vi leta efter heltalskvoter typ n/k som i alla fall ger en god approximation (eftersom nu ingen exakt svar fanns) till det irrationella talet, som vi nu kallar för p

$$p = \frac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2} = 1.7095112914$$

här angiven med tio första decimaler. Den matematiska teorin om kontinuerliga bråk (som vi inte går in närmare i utan bara noterar här) ger förslag till bästa approximationer (närmevärden) som kvot i stigande ordning. Några första sådana är 2/1, 5/3, 12/7, 41/24, 53/21 . Den första här 2/1 ger bara två tonsteg och är inget vidare bra annars heller, men bara för att se principen räknar vi felet. Här betecknas med p1, p2 osv. denna approximation till p i form av heltalskvot:

$p_1 = \frac{2}{1}$ dvs. $p_1 = 2$ felet blir $\frac{p - p_1}{p} = -17 \cdot \%$

Den andra, 5/3 är redan lite bättre, och producerar ett slags pentatonisk (5-tonig) skala:

$p_2 = \frac{5}{3}$ dvs. $p_2 = 1.666667$ felet blir $\frac{p - p_2}{p} = 2.5 \cdot \%$

Nästa blir ännu bättre, ger en 12 tonig skala, och det är den som används i vår västerländska musik:

$p_3 = \frac{12}{7}$ dvs. $p_3 = 1.714286$ felet blir $\frac{p - p_3}{p} = -0.28 \cdot \%$

Nästa förslag skulle bli en skala med 41 toner. Det skulle nog gå att komponera i en sådan skala, och säkert har man gjort det också t.ex inom den sk. elektroniska musiken:

$p_4 = \frac{41}{24}$ dvs. $p_4 = 1.708333$ felet blir $\frac{p - p_4}{p} = 0.069 \cdot \%$

Man har alltså fastnat i 12 tonsteg (kallade halva tonsteg av historiska skäl) för att det verkar praktiskt nog och ger hyfsad mycket variation. Historiskt har dock pentatoniska skalor använts mycket länge. Ett signalhorn utan ventiler till exempel ger en pentatonisk skala. Man tar inte alla 12 tonerna med i en vanlig tonskala heller utan bara 7 av dem åt gången, och den åttonde är oktaven (därifrån namnet, latinets octavus = den åttonde). De övriga ger för "dålig" harmoni, ansåg man i alla fall förr. Den grundläggande harmoniska 3/2-tonen blir nu den femte tonen i skalan av sju noter, det är därför den kallas "kvinten" (av lat. qvintus = den femte), men den är samtidigt den sjunde tonen i den 12-toniga "atonala" skalan (medan den skulle bli den tredje i den pentatoniska skalan ovan).

Man kan plocka in grundtoner lite på olika sätt. Historiskt har man använt en mängd olika tonskalor där man valde 7 toner bland dessa 12 halvtoner (grekerna hade en hel rös av dem, Joniska, Doriska osv. skalor), men två är numera dominerande, kallade dur och moll skalorna. Skillnaden är den tredje, den sjätte och den sjunde tonen, som kan väljas som den fjärde och den nionde och elfte i 12-tonsskalan, varvid man får en durskala, eller den tredje, den åttonde och den tionde, varvid man får en mollskala.

Pythagoreisk skala

Vi började ovan från A, och kvinten blir då E. Om vi i stället börjar från, säg, C blir kvinten G. Det är kvinten som är grundharmonin, den bör producera kvot 3/2 = 1.5 exakt. Nu är t.ex. C nummer 3 i vår ursprunglig A-skala ovan, och G är nummer 10. För E/A resp. G/C får vi

$$\frac{329.628}{220} = 1.4983091 \qquad \frac{391.996}{261.626} = 1.4983067$$

Det blir inte alldeles rätt kvot men nära nog. Nu är vår jämna skala alltså inte alldeles exakt när det gäller kvinten, och då inte heller med tanke på de andra tonstegen. Det fungerar ju, men hur skulle en skala se ut som producerar exakt rätt proportion för kvinten? En sådan kallas för en Pythagoreisk skala, från antikens Pythagoras (ca 600 fK) och hans halvt matematiska och halvt religiösa skola, där man undersökte talmystik. Därmed inte minst talmystiken i musiken. Nedan i en tabell finns beräkning med neråt (2/3) och uppåtgående (3/2) kvint i Pythagoreisk skala.

- Här börjar vi från C vilket vi sätter till 264 Hz, eftersom det är en äldre standard, och man brukar i dessa "ålderdomliga" skalor välja C-skalan som grundtonart. Slutsatserna blir desamma oberoende av vad det är för frekvenser man jobbar med, men frekvenserna i tonhöjderna blir (i praktiken obetydligt) annorlunda. Skalan konstrueras så att man tar första kvinten från grundtonen, andra kvinten från första kvinten osv. totalt 12 stycken i båda håll, uppåt och neråt; neråtgående är numrerade i tabellen nedan med ett "-" tecken.

- Om tonen blir högre än en oktav delas den med två för att transponera den ner en oktav, om den blir lägre än grundtonen multipliceras den med två för att återbörda den till toner inom oktaven. På så sätt får man fram tolv upphöjda toner och tolv nedsänkta toner. De anges i var sin kolumn för klarhetens skull. Närliggande rationell kvot till höger har här beräknats med kontinuerliga bråk, så det är på ett sätt bästa närmevärdet i form av en kvot av någorlunda små heltal. Inte alltid så små som man skulle önskat, visar det sig.

Pythagoreisk skala från C

	Kvint-nr	Ton	ner b Hz	upp # Hz	Kvot	C-skalans intervaller	Närliggande rationell kvot
	-12	Dbb	260,4		0,986540		>73/74
.	0	C		264,0	1,000000	prim	=1/1
.	-5	Db	278,1		1,053498		>20/19
.	7	C#		281,9	1,067871		>16/15
.	-10	Ebb	293,0		1,109858		<101/91
.	2	D		297,0	1,125000	sekund	=9/8
.	-3	Eb	312,9		1,185185		=32/27
.	9	D#		317,2	1,201355	liten ters	>6/5
o	-8	Fb	329,6		1,248590		<5/4
k	4	E		334,1	1,265625	ters	<19/15
t	-1	F	352,0		1,333333	kvart	=4/3
a	11	E#		356,8	1,351524		<23/17
v	-6	Gb	370,8		1,404664		>7/5
e	6	F#		375,9	1,423828		>10/7
n	-11	Abb	390,7		1,479811		<37/25
.	1	G		396,0	1,500000	kvint	=3/2
.	-4	Ab	417,2		1,580247		<49/31
.	8	G#		422,9	1,601807	liten sext	>8/5
.	-9	Bbb	439,5		1,664787		<5/3
.	3	A		445,5	1,687500	sext	>5/3
.	-2	Bb	469,3		1,777778		=16/9
.	10	A#		475,7	1,802032	liten sept	>16/9
.	-7	Cb	494,4		1,872885		>15/8
.	5	B		501,2	1,898438	sept	<15/8
.	0	C'	528,0		2,000000	oktav	=2/1
	12	B#		535,2	2,027287		

Tonarterna uppenbarar sig

Förväntningen är att tonerna stämmer överens så att det blir bara 12 olika. Så blir det nu inte alls, upphöjda och nersänkta toner stämmer inte, utan man får 25 olika toner i stället. Detta är den historiska grunden till att vi har olika tonarter. Faktum är att inbördes relationerna mellan tonerna inte blir exakt samma tal, när man bygger en skala med utgångspunkt av en viss ton, och sedan en annan, och följer övrigt halvtonsstegen. Alla dessa konstiga beteckningar Abb osv. är man tvungen att ta till, för t.ex. två halvtoner sänkt A i denna skala blir inte precis G utan en bit lägre. Det förefaller således bli hela 25 olika Pythagoreiska tonarter.

Det är intressant att se att till exempel B# "bis" (B-sharp) 535,3 Hz är högre än C' 528 Hz fast den "borde" vara lägre för den ingår ju i oktaven. Detta uttrycker tydligt dilemmat i den matematiska musikteorin: en fullt harmonisk skala får inte plats inom en oktav, utan spiller lite över. För att få den dit och kunna stämma faststämda instrument måste skalan "plattas till" något. Det är bl.a det man gör när man tempererar skalan. Samtidigt justerar man toner inbördes så att de upphöjda och nedsänkta tonerna matchar varandra i frekvens, så att man till slut får 12 olika toner i stället av 25.

Att skalan inte riktigt ryms i en oktav kan man också se direkt genom att använda lite matematik. Kvinten är sjunde tonen i oktavens 12 toner. Perfekta kvinter, dvs. 3/2 ggr. grundtonen, tillämpade 12 gånger i rad ska ge 7 oktaver. Matematiskt uttryckt (3/12) upphöjt till potensen 12 förväntas bli lika med två upphöjd till potensen 7. Men så blir det inte, kvinterna går lite för långt och missar målet.

kvinterna: $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 129.7463378906$ oktaverna: $2^7 = 128$

Det förra talet angivet här med 10 decimaler (fast det blir nu inte irrationellt men ett rationellt bråk mellan två stora tal, treans resp. tvåans tolfte potenser). Det andra talet är ett exakt heltal.

De olika tonarterna i det Pythagoreiska systemet

Nedan anges i tabellform hela mönstret av kvoter räknade från respektive grundtonen i skalan (som anges överst i kolumnen) i olika Pythagoreiska tonarter, medräknade de mer udda med dubbla sänkningar, samt denna besynnerliga B#, ibland kallad för "vargtonarten", som dessutom har fått numret 13: det riktigt bjuder till talmystik. Det är också kännetecknande att alla tonarter har var sin speciella "signatur" av kvoter. Varje tonart är således unik, vilket ligger som historisk grund till att tonarterna, i alla fall i klassisk musik, uppfattas ha olika karaktär och känslostämning.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
#	C	C#	D	D#	E	E#	F#	G	G#	A	A#	B	B#
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1	1,068	1,053	1,068	1,053	1,068	1,053	1,053	1,068	1,053	1,068	1,053	1,053	1,053
2	1,125	1,125	1,125	1,125	1,125	1,110	1,125	1,125	1,125	1,125	1,110	1,125	1,110
3	1,201	1,185	1,201	1,185	1,185	1,185	1,185	1,201	1,185	1,185	1,185	1,185	1,185
4	1,266	1,266	1,266	1,249	1,266	1,249	1,266	1,266	1,249	1,266	1,249	1,266	1,249
5	1,352	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333
6	1,424	1,405	1,424	1,405	1,424	1,405	1,405	1,424	1,405	1,424	1,405	1,424	1,405
7	1,500	1,500	1,500	1,500	1,500	1,480	1,500	1,500	1,500	1,500	1,500	1,500	1,480
8	1,602	1,580	1,602	1,580	1,580	1,580	1,580	1,602	1,580	1,602	1,580	1,580	1,580
9	1,688	1,688	1,688	1,665	1,688	1,665	1,688	1,688	1,688	1,688	1,665	1,688	1,665
10	1,802	1,778	1,778	1,778	1,778	1,778	1,778	1,802	1,778	1,778	1,778	1,778	1,778
11	1,898	1,873	1,898	1,873	1,898	1,873	1,898	1,898	1,873	1,898	1,873	1,898	1,873
12	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	1,973

	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12
b	Dbb	Db	Ebb	Eb	Fb	F	Gb	Abb	Ab	Bbb	Bb	Cb
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1	1,068	1,053	1,068	1,053	1,068	1,053	1,053	1,068	1,053	1,068	1,053	1,053
2	1,125	1,125	1,125	1,125	1,125	1,110	1,125	1,125	1,125	1,125	1,110	1,185
3	1,201	1,185	1,201	1,185	1,185	1,185	1,185	1,201	1,185	1,185	1,249	1,266
4	1,266	1,266	1,266	1,249	1,266	1,249	1,266	1,266	1,249	1,333	1,333	1,333
5	1,352	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,333	1,405	1,424	1,405	1,424
6	1,424	1,405	1,424	1,405	1,424	1,405	1,405	1,500	1,500	1,500	1,500	1,500
7	1,500	1,500	1,500	1,500	1,500	1,480	1,580	1,602	1,580	1,602	1,580	1,580
8	1,602	1,580	1,602	1,580	1,580	1,665	1,688	1,688	1,688	1,688	1,665	1,688
9	1,688	1,688	1,688	1,665	1,778	1,778	1,778	1,802	1,778	1,778	1,778	1,778
10	1,802	1,778	1,778	1,873	1,898	1,873	1,898	1,898	1,873	1,898	1,873	1,898
11	1,898	1,873	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000
12	2,000	2,107	2,136	2,107	2,136	2,107	2,107	2,136	2,107	2,136	2,107	2,107

Observera dock att tonarten Dbb har identisk signatur med C, bara frekvenserna skiljer sig medan kvoterna är de samma. Vi har således 24 olika signaturer dvs. tonarter (48 om man räknar dur och moll separat). Man ser här också tydligt att vissa tonarters alla 12 toner inte ryms inom ramen på en oktav, vilket gäller särskilt de sänkta tonarterna (markerade i tabellen med negativ numrering -1 till -12). Även den vanliga tonarten F tillhör dessa. En del av dessa tonarter är mindre vanligt förekommande, de med dubbla b'n särskilt, varför deras existens är mindre väl känt. När man skapat ett tempererat skala har man "tämjt vargarna", jämnat ut den så att mycket av konstigheter försvinner.

I kompromissen försvinner sedan alla b-tonarter som separata tonarter och går ihop med motsvarande # -tonarter. Som beteckning av tonarter kvarstår dock enkla b-tonarter som Ab osv. av historiska skäl. Man förlorar också de exakta harmonierna. I teorin innebär det att man får en viss interferens, "beating", i treklangerna. Det förekommer också att instrument byggs för en särskild skala, eller till och med att instrumentets tonala karaktär kräver att en viss typ av skala används för att det skulle låta bra. Därför förekommer olika skalor fortvarande, alla instrument är inte anpassade till den jämna tempererade standardskalan.

Två toner tillsammans som bildar en perfekt kvint låter alltid bra, men i en treklang ska det finnas en ters också (av latinska tertius = den tredje dvs. ton nummer tre räknat från grundtonen). Vi har alltså tonerna 1, 3 och 5 i en treklang, t.ex. C, E, G där E är ters och G kvint. Det går inte alltid ihop så bra, kvinterna vill inte alltid ljuda väl med sina terser, det inträffar i några av dessa Pythagoreiska tonarterna. De kallades ibland för "vargintervaller" eftersom de "ylade" illa (ska inte blandas ihop med "vargtoner", ett begrepp som hör till instrumentbygge och har med oönskade resonanser att göra.) Detta var också ett bidragande orsak varför man forna tider ansåg terser vara orena.

Terserna skulle kräva en egen beräkning, men vi avstår från det. En beräkning som kallas för 5-gräns (5-limit) är en sådan som tar med terser, där använder man talen 2,3,5 och deras inbördes relationer för att skapa skalor. De Pythagoreiska skalorna kan då kallas för 3-gräns skalor, då man bara använder talen 2 och 3. Det blir inte bättre med 5-gräns eller högre vad gäller att få det hela snyggt in i oktaverna, utan man får en hel massa närliggande toner att välja och kompromissa mellan. Alltsammans blir detta ett sammelsurium av alternativa skalor, och de musiklärda tvistar alltjämnt om kvalitéerna och rangordningen mellan dem. Man inser lätt värdet med den moderna standardiserade jämna tempererade skalan, det är ändå en bra kompromiss som är enkel att hantera.

Varför fungerar det då egentligen?

Nu har vi sett att det finns ingenting som exakt stämmer i musikens matematiska teori. Harmoniläran krävde att det hela skulle bygga på kvoter mellan små heltal, och det visar sig att det inte alls går att sätta ihop sådana skalor. Hur är det då möjligt med musik och harmonier över huvud taget? Det är bl.a på grund av två saker. Den ena kallas för vibrato, det andra för klangbredden. Den teoretiskt matematiska tonen är rak, den varierar varken i frekvens eller i styrka. Den har också bara en enda frekvens, eller några få, och frekvenserna är exakta tal som kan anges hur noggrant som helst. Sådan är lyckligtvis inte den fysikaliska verkligheten.

Tonerna vibrerar och varierar i frekvens, så att man aldrig kan höra dem på exakt en och samma läge. I princip är det skillnad mellan vibrato och tremolo. Vibrato menar att tonen varierar i frekvens enligt ett regelbundet svängande mönster. Tremolo däremot innebär att tonen variera i styrka. I själva verket blir effekten av vibrato och tremolo ungefär den samma, den matematiska frekvensanalysen visar att den ena typen av variation alltid medför den andra typen som en konsekvens. Sådana variationer är typiskt några få svängningar i sekund.

Nu är "felet" i kompromisserna som vi talat om ovan inte så stor, det är också i storleksklassen några svängningar i sekunden. "Felet" i approximationen ger upphov till interferenser av några svängningar till högst något tiotal i sekunden, men det försvinner i stort i de naturliga svängningarna av tonhöjden. Man till och med affekterar vibrato och tremolo med flit för att det ger mer känsla, och faktum är att interferenser från de inexakta skalorna också bidrar till mer känsla till musiken. Det är det man från början menade med en "tempererad" skala, den har en viss temperament, en viss känsla. Så det fungerar ändå rent musikaliskt, trots att matematiken går ihop bara så där ungefär.

En annan viktig fysikalisk faktum, som ofta glöms bort i musikteorin, är klangen. En ren matematisk sinusformad frekvens har ingen klang alls, den låter helt sterilt och duger knappt till att användas i musiken. När elektroniska instrument i början av övernitiska konstruktörer gavs en så ren ton som möjligt, försökte snart de som spelade på dem komma ifrån den rena tonen. "Distad" elgitarr är ett sådant exempel. Elektroniken gav en alldeles för ren och karaktärslös klang och man ville ge den mer känsla. Man tog till olika knep och lät förstärkaren "klippa", så det lät fränare.

Också en sådan gammal typ av instrument som violin är "distad", har en ljudkaraktär som bygger på klippning av tonen, fast det kanske är inget man kommer på att tänka direkt. Stråken låter inte strängen vibrera helt fritt utan den drar och släpper, drar och släpper, i snabb takt, så att man får en något fyrkantig svängning. Saxofon har en rätt frän ton den också, och en piano bär med sig en massa ekon och klang från den tunga möbelns träkonstruktioner.

Alla naturliga instrument har mer eller mindre bred klang, det innebär att de inte bara har ett antal distinkta matematiska övertoner i heltalsproportioner till grundtonen, utan en hel kontinum av frekvenser runtomkring tonläget. Det medför att tonläget inte blir skarpt utan får en bredd, och den har således ingen alldeles exakt position i frekvens. Denna bredd gör att tonläget är förlåtande, lite "fel" märks inte. Vad det leder till är att harmonin fungerar trots att matematiken inte stämmer alldeles exakt

---

Senast uppdaterad: 2009-03-25 och överfört från html till PDF-format.